数理解析研究所講究録
368巻 1979年 23-32

最高ウエイトを持つ表現のホイタッカーモデル

広島大 理学部 橋爪道彦

実半単純リー群の既約表現のうち 最高ウエイトをもつ表現について それが ホイタッカーモデルと呼ばれる表現の実現を持つかを考察する。

以下Gを連結半単純リー群で中心が有限なものとし Kを Gの極大コンパクト部分群 Gの岩沢分解を $G=NAK$ とする。Nの表現 χ (その表現空間を $\mathcal{H}$) をとり次のようなG上の関数の空間を考える。

$$C^\infty(G,\chi)=\{f: G \xrightarrow{C^\infty} \mathcal{H} \mid f(ng)=\chi(n)f(g) \quad g\in G, n\in N\}.$$

$C^\infty(G,\chi)$ は 右からのGの作用 $R(g)f(x)=f(xg)$ $x,g\in G$ により G一加群になるが 更に次のようにして $\mathfrak{g}$一加群の構造も持つ (但 $\mathfrak{g}$ はGのリー環)。

$$f(g;X)=R(X)f(g)=\frac{d}{dt}f(g\exp tX)\Big|_0 \quad g\in G,\ X\in\mathfrak{g}.$$

$C^\infty(G,\chi)$ の元 f が,(右)K−finite であるとは $\langle R(k)f;\ k\in K\rangle$ が有限次元部分空間を張るときをいう。$C^\infty(G,\chi)^0$ で $C^\infty(G,\chi)$ 中

の K-finite な元全体のなす部分空間を表わすことにすれば $C^\infty(G,\chi)^0$ は $\mathfrak{g}$-加群の構造をもつことが知られている。

(定義) (π, V) を既約 $\mathfrak{g}$-加群(厳密には既約,許容的 $(\mathfrak{g}, K)$-加群)とする。"(π, V) がホイタッカー・モデル(χ-型の)をもつ"とは (π, V) が $C^\infty(G,\chi)^0$ の部分加群と同型であるときをいう。

以下我々は Harish-Chandra [ ] で与えられた最高ウエイトをもつ表現について それがいかなる χ に対し χ-型のホイタッカーモデルをもつかを調べる。

G を連結,非コンパクト,実単純リー群で次の仮定をみたすとする。(i) G は単連結複素単純リー群 G_c の実形 (ii) G/K は G-不変な複素構造をもつ.(ここに K は G の極大コンパクト部分群).

G のリー環を $\mathfrak{g}$, K のリー環を $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を $\mathfrak{g}$ のカルタン分解, θ を対応するカルタン包合写像, $B(X, Y)$ を $\mathfrak{g}$ のキリング形式とする。仮定より $\mathfrak{k}$ の中心 $\mathfrak{z}$ は1次元で $\mathfrak{z}$ 中に元 Z であって $\mathrm{ad}\,Z$ が $\mathfrak{p}$ に複素構造を与えるものが1意的に存在する。$\mathfrak{p}_+$ 及び $\mathfrak{p}_-$ を $\mathfrak{p}_+ = \{X \in \mathfrak{p}_c : [Z, X] = \sqrt{-1}X\}$, $\mathfrak{p}_- = \{X \in \mathfrak{p}_c : [Z, X] = -\sqrt{-1}X\}$ で与える. $\mathfrak{p}_+, \mathfrak{p}_-$ は $\mathfrak{g}_c$ の可換部分リー環で, $\mathfrak{g}_c = \mathfrak{k}_c \oplus \mathfrak{p}_+ \oplus \mathfrak{p}_-$ である.

又仮定より $\mathfrak{g}$ のカルタン部分環 $\mathfrak{t}$ で $\mathfrak{k}$ にふくまれるものが存在する。Δ を $\mathfrak{g}_c$ の $\mathfrak{t}_c$ に関するルート系とする。$\Delta_{\mathfrak{k}}, \Delta_{\mathfrak{p}}$ を

$\Delta_{\mathfrak{k}} = \{\alpha \in \Delta : \mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{k}_c\}$ = コンパクトルートの集合

$\Delta_{\mathfrak{p}} = \{\alpha \in \Delta : \mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{p}_c\}$ = 非コンパクトルートの集合 とすると

$\Delta = \Delta_k \cup \Delta_p$, $\Delta_k \cap \Delta_p = \phi$ である。

Δ に、『非コンパクトルートαが正 $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{g}^\alpha \subset \mathfrak{p}_+$』となる順序を入れる。$\Delta^+$ を上の順序に関し正のルートの集合，$\Delta_k^+ = \Delta_k \cap \Delta^+$，$\Delta_p^+ = \Delta_p \cap \Delta^+$ とおく。又 $\widetilde{\Delta}^+ = \Delta_k^+ \cup \Delta_p^-$ とおく。各ルート α に対しルートベクトル E_α を,(i) $B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 2/\langle\alpha,\alpha\rangle$ (ii) $\theta \overline{E_\alpha} = -E_{-\alpha}$ をみたすようにとる。ここに $\langle\,,\rangle$ はキリング形式から自然に誘導される $(\sqrt{-1}\mathfrak{t})^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\sqrt{-1}\mathfrak{t}, \mathbb{R})$ 上の内積，$X \mapsto \overline{X}$ は $\mathfrak{g}_c$ の $\mathfrak{g}$ に関する共役を表わす。$H_\alpha = [E_\alpha, E_{-\alpha}]$ は $\mathfrak{t}_c$ の元で $\alpha(H_\alpha) = 2$ をみたす。Λ を $(\sqrt{-1}\mathfrak{t})^*$ の元で $\Lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}^+$ $(\forall \alpha \in \Delta_k^+)$ をみたすものとする。

［定義］既約 $\mathfrak{g}$－加群 (π, V) が $\widetilde{\Delta}^+$ に関し最高ウエイト Λ をもつ表現であるとは V 中に次の条件をみたす零でない元 F_Λ が存在するときをいう。

(i) $\pi(H) F_\Lambda = \Lambda(H) F_\Lambda \qquad \forall H \in \mathfrak{t}_c$

(ii) $\pi(E_\alpha) F_\Lambda = 0 \qquad \forall \alpha \in \widetilde{\Delta}^+$

(iii) $\pi(\mathcal{G}) F_\Lambda = V \qquad$ (ここに $\mathcal{G}$ は $\mathfrak{g}_c$ の展開環).

(注) いわゆる正則離散系列の表現は上の性質をみたす.

以下最高ウエイト Λ をもつ表現を π_Λ と書くことにする。π_Λ が χ－型ホイタッカーモデルを持つかどうかは 次の関係(正確には微分方程式系)を満足する零でない関数 F_Λ $C^\infty(G, \chi)^0$ が存在するかどうかに帰着する。

$$\text{(i)} \quad R(H)F_\Lambda = \Lambda(H)F_\Lambda \qquad {}^\forall H \in \mathfrak{t}_c$$

$$\text{(ii)}_1 \quad R(E_\alpha)F_\Lambda = 0 \qquad {}^\forall \alpha \in \Delta_k^+$$

$$\text{(ii)}_2 \quad R(E_{-\beta})F_\Lambda = 0 \qquad {}^\forall \beta \in \Delta_p^+ .$$

最初に 上の (i) 及び (ii)$_1$ をみたす関数について考察する。$\Lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}^+$ $({}^\forall\alpha \in \Delta_k^+)$ より，Λ を最高ウエイトとする K(従って K_c) の既約表現 $(\tau_\Lambda, V_\Lambda)$ が存在する。v_Λ を最高ウエイト Λ に対応するウエイトベクトルとする。$(\tilde{\tau}_\Lambda, \tilde{V}_\Lambda)$ を $(\tau_\Lambda, V_\Lambda)$ の反傾表現としよう。F を $\tilde{V}_\Lambda \otimes \mathcal{H}$ に値をもつ G 上の C^∞-関数で次の関係をみたすものとする：$F(ngk) = \tilde{\tau}_\Lambda(k^{-1}) \otimes \chi(n) F(g)$ $(g \in G,\ n \in N\ k \in K)$. $v \in V_\Lambda$ に対し 関数 F_v を $F_v(g) = \langle F(g), v \rangle$ で定義すると $F_v \in C^\infty(G, \chi)$ であり，$F_v(gk) = \langle F(g), \tau_\Lambda(k)v \rangle$ ...(*) $(g \in G,\ k \in K)$ より F_v は右 K-finite かつ K-type は τ_Λ である。

とくに F_{v_Λ} を考えると (*) 及び v_Λ が最高ウエイトベクトルであることから F_{v_Λ} は (i) 及び (ii)$_1$ をみたすことがわかる。又コンパクト群の表現の一般論より $C^\infty(G,\chi)^0$ の元で τ_Λ と異なる K-type をもつものが (i) と (ii)$_1$ をみたすことはない。故に我々の問題は 上に与えた関数 F_{v_Λ} で 更に (ii)$_2$ をみたす零でない関数が存在するかどうかに帰着した。以下我々は 微分方程式系 (ii)$_2$ の自明でない解の構成を問題とする。

2つのルート α, β が 強直交とは $\alpha+\beta$ 及び $\alpha-\beta$ が共にルートにならぬときを言う。強直交する非コンパクト正

ルートの極大集合 $\Psi=\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r\}$ を次のように定める。γ_1 を最大ルートとし，以下 $j\geq 1$ に対し γ_{j+1} を $\gamma_1,\cdots,\gamma_j$ に強直交する非コンパクト正ルートのうち最大なものにとる。各 j に対し $A_{\gamma_j}=E_{\gamma_j}+E_{-\gamma_j}$ とおき $\mathfrak{a}=\sum_{j=1}^{r}\mathbb{R}A_{\gamma_j}$ とすれば $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{p}$ にふくまれる最大可換部分環である。又 $\mathfrak{t}_c$ の実線型部分空間 $\mathfrak{t}_R$ を $\mathfrak{t}_R=\sum_{j=1}^{r}\mathbb{R}H_{\gamma_j}$ で定義する。このときケーリー変換 $\mathrm{Ad}\,C$（但し $C=\prod_{j=1}^{r}\exp\left(-\frac{\pi}{4}(E_{\gamma_j}-E_{-\gamma_j})\right)\in G_c$）は $\mathfrak{t}_R\xrightarrow{\sim}\mathfrak{a}$（同型）を与える。$\gamma_j$ $(1\leq j\leq r)$ の $\mathfrak{t}_R$ への制限も同じ文字 γ_j で表わすことにする。このとき $\gamma_j(H_{\gamma_k})=2\delta_{jk}$ である。$\mathfrak{a}^*=\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a},\mathbb{R})$ の元 λ_j $(1\leq j\leq r)$ を

$$\lambda_j(A)=\gamma_j(\mathrm{Ad}(C^{-1})A)\qquad (A\in\mathfrak{a})$$ で定める。

補題1.（C.C. Moore [ ]）Δ^+ の元の $\mathfrak{t}_R$ への制限に関し次の2つの場合が成立する。夫々 Case I 及び Case II と名づける。

(i) $\Delta_{\mathfrak{k}}^+$ の元の $\mathfrak{t}_R$ への制限で零でないものは次の形の集合を成す。

Case(I) $\{\frac{1}{2}(\gamma_i-\gamma_j):1\leq i<j\leq r\}$

Case(II) $\{\frac{1}{2}(\gamma_i-\gamma_j):1\leq i<j\leq r\}\cup\{\frac{1}{2}\gamma_i:1\leq i\leq r\}$

(ii) $\Delta_{\mathfrak{p}}^+$ の元の $\mathfrak{t}_R$ への制限は零でなく次の形の集合を成す。

Case(I) $\{\frac{1}{2}(\gamma_i+\gamma_j):1\leq i\leq j\leq r\}$

Case(II) $\{\frac{1}{2}(\gamma_i+\gamma_j):1\leq i\leq j\leq r\}\cup\{\frac{1}{2}\gamma_i:1\leq i\leq r\}$

次に $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系 Σ について次の補題が成立つ。

補題2. (C.C. Moore) $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{a}$ に関する制限ルート系 Σ は次の形の集合から成る。

Case(I) $\Sigma = \{\pm\frac{1}{2}(\lambda_i-\lambda_j) : 1\le i<j\le r\} \cup \{\pm\frac{1}{2}(\lambda_i+\lambda_j) : 1\le i\le j\le r\}$

Case(II) $\Sigma = \{\pm\frac{1}{2}(\lambda_i-\lambda_j) : 1\le i<j\le r\} \cup \{\pm\frac{1}{2}(\lambda_i+\lambda_j) : 1\le i\le j\le r\} \cup \{\pm\frac{1}{2}\lambda_i : 1\le i\le r\}$

以下 Σ に上の複号で $+$ をとるルートを正のルートとするような順序を入れる。$\lambda\in\Sigma$ に対しそのルート空間を $\mathfrak{n}_\lambda$ と書く。$\mathfrak{g}$ の部分空間 $\mathfrak{n}_0$, $\mathfrak{n}_{1/2}$, $\mathfrak{n}_1$ を夫々

$$\mathfrak{n}_0 = \sum_{1\le i<j\le r} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\lambda_i-\lambda_j)}$$

$$\mathfrak{n}_{1/2} = \sum_{1\le i\le r} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}\lambda_i}$$ (注) Case(I) の場合 $\mathfrak{n}_{1/2}=(0)$.

$$\mathfrak{n}_1 = \sum_{1\le i\le j\le r} \mathfrak{n}_{\frac{1}{2}(\lambda_i+\lambda_j)},$$

で定めると $[\mathfrak{n}_p, \mathfrak{n}_q] \subset \mathfrak{n}_{p+q}$ ($p,q=0,\frac{1}{2},1$ 但し $\mathfrak{n}_{p+q}=(0)$ $p+q>1$)
従って $\mathfrak{n}_0$, $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_1\oplus\mathfrak{n}_{1/2} =: \mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}_1\oplus\mathfrak{n}_{1/2}\oplus\mathfrak{n}_0 =: \mathfrak{n}$ は $\mathfrak{g}$ の部分リー環で $\mathfrak{n}_1$ は可換かつ $\mathfrak{h}$ の中心である。又 $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}\oplus\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{k}$ が成立しこれは $\mathfrak{g}$ の岩沢分解を与える。以下 A, N, N_0, N_1, H を夫々 $\mathfrak{a}, \mathfrak{n}, \mathfrak{n}_0, \mathfrak{n}_1, \mathfrak{h}$ に対応する G の解析的部分群とする。$G=NAK$, $N=HN_0$ である。又 $\mathfrak{n}_{1/2}^- = \mathfrak{n}_{1/2}^c \cap (\mathfrak{k}_c+\mathfrak{p}_-)$, $\mathfrak{h}^- = \mathfrak{h}_c\cap(\mathfrak{k}_c+\mathfrak{p}_-)$ とおくと $\mathfrak{h}^-$ は $\mathfrak{h}_c$ の複素リー部分環で $\mathfrak{h}_c = \mathfrak{h}^- + \overline{\mathfrak{h}^-}$, $\mathfrak{h}^-\cap\overline{\mathfrak{h}^-} = \mathfrak{n}_1^c$ かつ $\mathfrak{h}^- = \mathfrak{n}_1^c\oplus\mathfrak{n}_{1/2}^-$ が成立つことに注意しておく。次に $E_{-\beta}$ ($\beta\in\Delta_{\mathfrak{p}}^+$) の岩沢分解を与える。これは我々の微分方程式系を解くのに "Key" となるものである。$\mathfrak{g}_c = \mathfrak{n}_c\oplus\mathfrak{a}_c\oplus\mathfrak{k}_c$ より $\forall X\in\mathfrak{g}_c$ は

$X = P_{\mathfrak{n}}X + P_{\mathfrak{a}}X + P_{\mathfrak{k}}X$ (但し $P_{\mathfrak{n}}X$ は X の $\mathfrak{n}$-成分, $P_{\mathfrak{a}}X$ は X の $\mathfrak{a}$-成分, $P_{\mathfrak{k}}X$ は X の $\mathfrak{k}$-成分)と1意的に書ける。又次のルートの集合を導入する。

$$P_i = \{\beta \in \Delta_{\mathfrak{g}}^+ ;\ \beta|_{\mathfrak{t}_R} = \tfrac{1}{2}\gamma_i\} \qquad 1 \le i \le r$$

$$P_{ij} = \{\beta \in \Delta_{\mathfrak{g}}^+ :\ \beta|_{\mathfrak{t}_R} = \tfrac{1}{2}(\gamma_i + \gamma_j)\} \qquad 1 \le i < j \le r.$$

補題1より $\Delta_{\mathfrak{g}}^+ = \Psi \cup (\bigcup_{i<j} P_{ij}) \cup (\bigcup_i P_i)$

命題1. $E_{-\beta}$ $(\beta \in \Delta_{\mathfrak{g}}^+)$ の岩沢分解は次の通り.

(i) $\beta = \gamma_j \in \Psi$ $(1 \le j \le r)$ のとき,

$P_{\mathfrak{k}}E_{-\gamma_j} = -\frac{1}{2}H_{\gamma_j}$, $P_{\mathfrak{a}}E_{-\gamma_j} = \frac{1}{2}A_{\gamma_j}$ 従って $P_{\mathfrak{n}}E_{-\gamma_j} = E_{-\gamma_j} + \frac{1}{2}H_{\gamma_j} - \frac{1}{2}A_{\gamma_j}$.

更に $\sqrt{-1}P_{\mathfrak{n}}E_{-\gamma_j} = X_{\gamma_j}$ とおけば $X_{\gamma_j} \in \mathfrak{n}_{\lambda_j}$ & $\mathfrak{n}_{\lambda_j} = \mathbb{R}X_{\gamma_j}$,

$$E_{-\gamma_j} = -\sqrt{-1}X_{\gamma_j} + \tfrac{1}{2}A_{\gamma_j} - \tfrac{1}{2}H_{\gamma_j} \qquad (1 \le j \le r).$$

(ii) $\beta \in P_{ij}$ $(1 \le i < j \le r)$ のとき

$P_{\mathfrak{k}}E_{-\beta} = -[E_{\gamma_i}, E_{-\beta}]$, $P_{\mathfrak{a}}E_{-\beta} = 0$. 従って $P_{\mathfrak{n}}E_{-\beta} = E_{-\beta} + [E_{\gamma_i}, E_{-\beta}]$

更に $P_{\mathfrak{k}}E_{-\beta} \in \mathfrak{g}^{\gamma_i - \beta}$ かつ $\gamma_i - \beta \in \Delta_{\mathfrak{k}}^+$, $(\gamma_i - \beta)|_{\mathfrak{t}_R} = \frac{1}{2}(\gamma_i - \gamma_j)$。

又 $P_{\mathfrak{n}}E_{-\beta} \in \mathfrak{n}^c_{\frac{1}{2}(\lambda_i - \lambda_j)} + \mathfrak{n}^c_{\frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_j)}$ で, 従って $P_{\mathfrak{n}}E_{-\beta}$ は

$P_{\mathfrak{n}}E_{-\beta} = U_\beta - \sqrt{-1}X_\beta$ $(U_\beta \in \mathfrak{n}^c_{\frac{1}{2}(\lambda_i - \lambda_j)},\ X_\beta \in \mathfrak{n}^c_{\frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_j)})$ と書ける。

故に $E_{-\beta} = (U_\beta - \sqrt{-1}X_\beta) - [E_{\gamma_i}, E_{-\beta}]$ $(\beta \in \bigcup_{i<j} P_{ij})$.

$\{U_\beta : \beta \in P_{ij}\}$ は $\mathfrak{n}^c_{\frac{1}{2}(\lambda_i - \lambda_j)}$ の basis, $\{X_\beta : \beta \in P_{ij}\}$ は $\mathfrak{n}^c_{\frac{1}{2}(\lambda_i + \lambda_j)}$ の basis を成す。最後に $S = \sum_{j=1}^{r} X_{\gamma_j}$ とおけば $S \in \mathfrak{n}_1$ で

$[U_\beta, S] = X_\beta$ $(\beta \in \bigcup_{i<j} P_{ij})$ が成立つ。

(iii) $\beta \in P_i$ $(1 \le i \le r)$ のとき.

$P_{\mathfrak{k}}E_{-\beta} = -[E_{\gamma_i}, E_{-\beta}]$, $P_{\mathfrak{a}}E_{-\beta} = 0$, $P_{\mathfrak{n}}E_{\beta} = E_{-\beta} + [E_{\gamma_i}, E_{-\beta}]$

しかも $P_{\mathfrak{k}}E_{-\beta} \in \mathfrak{g}^{\gamma_i-\beta}$, $\gamma_i - \beta \in \Delta_{\mathfrak{k}}^{+}$, $(\gamma_i-\beta)|_{t_R} = \frac{1}{2}\gamma_i$.

又 $P_{\mathfrak{n}}E_{-\beta} \in (\mathfrak{n}^{c}_{\frac{1}{2}\lambda_i}) \cap \mathfrak{n}^{-}_{1/2}$ である。以下 $P_{\mathfrak{n}}E_{-\beta} = W_{\beta}$ とおく

$$E_{-\beta} = W_{\beta} - [E_{\gamma_i}, E_{-\beta}] \qquad \beta \in P_i \quad 1 \le i \le r \text{ で}$$

$\{W_{\beta} : \beta \in \bigcup_{i=1}^{r} P_i\}$ は $\mathfrak{n}^{-}_{1/2}$ の基底を成す。

以上の準備のもとに $R(E_{\beta})F_{v_{\Lambda}} = 0 \quad (\beta \in \Delta_{\mathfrak{g}}^{+})$ をみたす関数 F_{v_Λ} を決定しよう。以下 F_{v_Λ} を単に F_Λ と書く。

N の表現 χ として以下で与える表現を考えよう。N_1 の1次元表現は $\xi \in \mathfrak{n}_1^{*} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{n}_1, \mathbb{R})$ により次の形で与えられる。$\psi_{\xi}(\exp X) = \exp(2\pi\sqrt{-1}\,\xi(X)) \qquad X \in \mathfrak{n}_1$.

$N = HN_0$ (半直積), N_1 は H の中心であることに注意する。H の既約表現でその N_1 への制限が ψ_{ξ} $(\xi \in \mathfrak{n}_1^{*})$ であるようなものを1つとる。それを ρ_{ξ} としよう。N の表現 χ として ρ_{ξ} を N に誘導して得られる表現 χ_{ξ} をとる。

$C^{\infty}(G, \rho_{\xi}) = \{F : G \xrightarrow{C^{\infty}} \mathcal{H}_{\xi} \mid F(hg) = \rho_{\xi}(h)F(g),\ g \in G,\ h \in H\}$

とおけば容易に

$$C^{\infty}(G, \chi_{\xi}) \cong C^{\infty}(G, \rho_{\xi}) \quad \& \quad C^{\infty}(G, \chi_{\xi})^{0} \cong C^{\infty}(G, \rho_{\xi})^{0}.$$

(ここに $\mathcal{H}_{\xi}$ は ρ_{ξ} の表現空間)。$\mathcal{H}_{\xi}$ は $C^{\infty}(H, \psi_{\xi}) = \{\varphi \in C^{\infty}(H) : \varphi(n_1 h) = \psi_{\xi}(n_1)\varphi(h) \quad h \in H,\ n_1 \in N_1\}$ の部分空間にとれることに注意しておく。$F \in C^{\infty}(G, \rho_{\xi})$ とすると, $F(g) \in C^{\infty}(H)$ $(\forall g \in G)$ である。そこで $F(h:g) = F(g)(h)$ $(g \in G,\ h \in H)$ とおく。

我々の求める関数F_Λは そのNoAへの制限により完全に決定されることは上に述べたことから容易にわかる。我々は
$F_\Lambda(h:n_0a)$ を $F_\Lambda(h:n_0:a)$ とも書くことにする. 又前に述べたように左不変ベクトル場の作用を $f(x;X)$ と書くことにする。

$$F_\Lambda(h:n_0a;X) = F_\Lambda(h;Ad(n_0a)X:n_0a) \quad (X\in\mathfrak{g})$$

とくに $F_\Lambda(h:n_0a;X) = 2\pi\sqrt{-1}\,\xi(Ad(n_0a)X)F_\Lambda(h:n_0a)$ $(X\in\mathfrak{n}_1)$
に注意すると 命題1より 次の微分方程式系をうる。

① $F_\Lambda(h:n_0:a;A_{\gamma_j}) = \{\Lambda(H_{\gamma_j}) - 4\pi\xi(Ad(n_0a)X_{\gamma_j})\}F_\Lambda(h:n_0:a)$ $(1\le j\le r)$

② $F_\Lambda(h:n_0;Ad(a)U_\beta:a) + 2\pi\xi(Ad(n_0a)X_\beta)F_\Lambda(h:n_0:a) = 0$
for $\forall\beta\in\bigcup_{i<j}P_{ij}$,

③ $F_\Lambda(h;Ad(n_0a)W_\beta:n_0:a) = 0$ $\quad\forall\beta\in\bigcup_{i=1}^{r}P_i$

(注) ③は命題1 (iii) より
$F_\Lambda(h;W:n_0:a) = 0$ $\quad(\forall W\in\mathfrak{n}_{1/2}^-)$ と同値.

又②は Case(I) の場合は考える必要はない。

①,②を満たす関数としては $S=\sum_{j=1}^{r}X_{\gamma_j}$ として

$$\Phi_\Lambda(n_0:a) = \exp\{\Lambda(Ad(c^{-1})\log a)\}\exp\{-2\pi\xi(Ad(n_0a)S)\}$$

がとれる。更にこれは本質的に1意である。よって

$$F_\Lambda(h:n_0:a) = C_\Lambda(h)\Phi_\Lambda(n_0:a)$$

と書ける。ここに $C_\Lambda(h)$ は H上の C^∞-関数で

$$C_\Lambda(h;Z) = 2\pi\sqrt{-1}\,\xi(Z)C_\Lambda(h) \qquad Z\in\mathfrak{n}_1$$

10

及び　$c_\Lambda(h; W)=0$　${}^\forall W\in\mathfrak{n}_{1/2}^-$　を満たすねばならぬ。　このような関数が存在するためには $\mathfrak{f}^-=\mathfrak{n}_1^c\oplus\mathfrak{n}_{1/2}^-$ が ξ に関し正の polarization であることが必要十分即ち　Hの既約表現 ρ_ξ が Kostant の意味での $\rho(\xi,\mathfrak{f}^-)$ でなければならぬ。以上まとめて

定理. 最高ウエイト Λ をもつ既約 $(\mathfrak{g},K)$-加群 π_Λ は χ_ξ-型のホイタッカーモデルをもつ。ここに　χ_ξ は

$\chi_\xi=\mathrm{Ind}_H^N\rho(\xi,\mathfrak{f}^-)$ で与えられる N の表現 (但し $\xi\in\mathfrak{n}_1^*$, $\mathfrak{f}^-=\mathfrak{f}_c\cap(\mathfrak{k}_c+\mathfrak{p}_-)$ で $\mathfrak{f}^-$ は ξ における正の polarization)

又 π_Λ のホイタッカーモデルは unique である。

(追記) Nの表現 χ がいわゆる非退化指標の場合 $G\simeq SL(2,\mathbb{R})$ の場合を除いて π_Λ は χ-型のホイタッカーモデルをもたぬことも命題1を用いて対応する微分方程式系を解くことにより示される.(即ち零解しか存在しない).